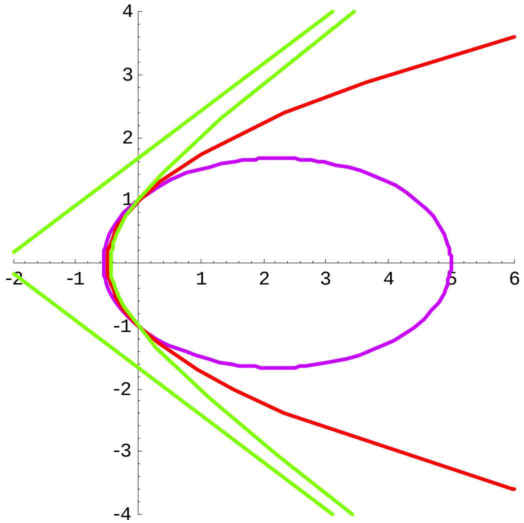
Algebraische Kurven   Gleichungsübersicht in Polarkoordinaten   -1-

Prof. Dr. Dörte Haftendorn,   Dezember 03

Kegelschnitte

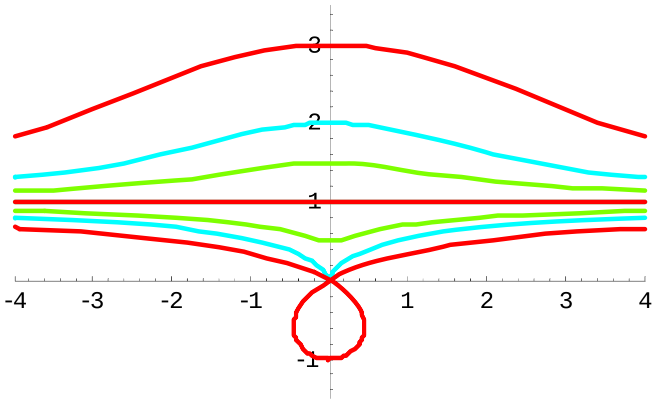
$$r = r(\theta) = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}$$

Pol im Brennpunkt



Konchoiden
Gerade Straße, Höhenlage a
Leinenlänge k

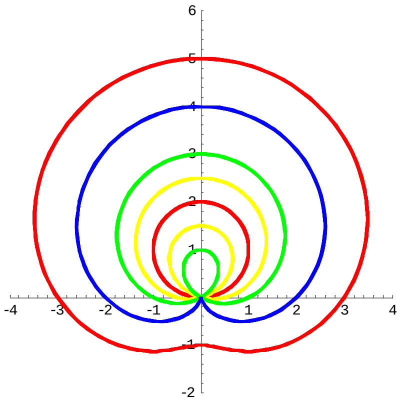
$$r = r(\theta) = \frac{a}{\sin\theta} \pm k$$



Pascalsche Schnecken = Konchoiden mit Kreisstraße durch (0/0), dort steht der Baum

Mittelpunkt $(\frac{a}{2}, 0)$, **Leinenlänge k**

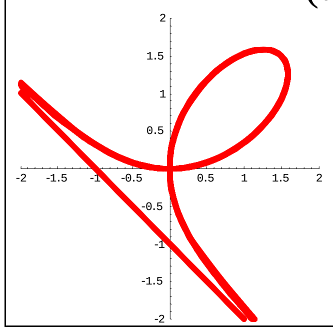
$$r = r(\theta) = a \cdot \sin(\theta) \pm k$$



Kardioide mit a=k, **hier blau, 2. von außen**

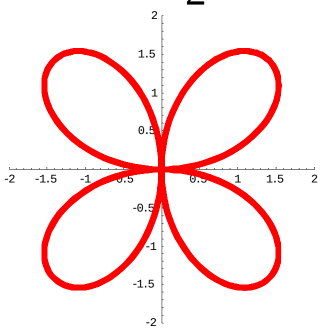
Kartesisches Blatt, k=1

$$r = r(\theta) = \frac{3}{2}k\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)^3 + \cos(\theta)^3}$$



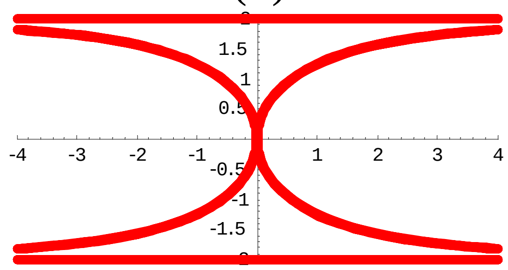
Rosette, Rosenkurve, c=4

$$r = r(\theta) = \frac{c}{2}\sin(2\theta)$$



Kappa-Kurve

$$r = r(\theta) = \frac{a}{\tan(\theta)}$$



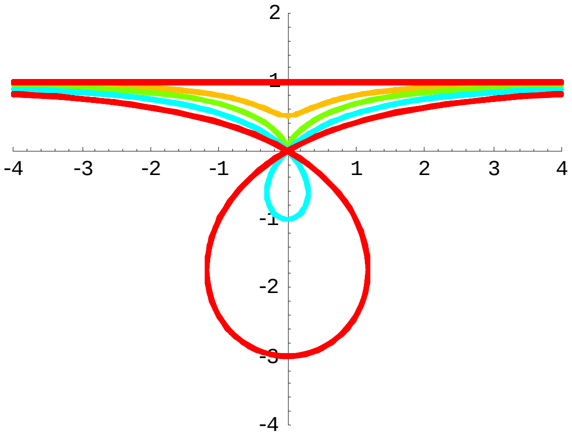
Algebraische Kurven   Gleichungsübersicht in Polarkoordinaten

Prof. Dr. Dörte Haftendorn,   Dez. 03

Kissoide allgemein

$$r = r(\theta) = c\,\frac{1 - k\sin(\theta)}{\sin(\theta)}$$

k=0, k=0,5,   Efeukurve k=1,   Strophoide k=2, Trisektrix k=4

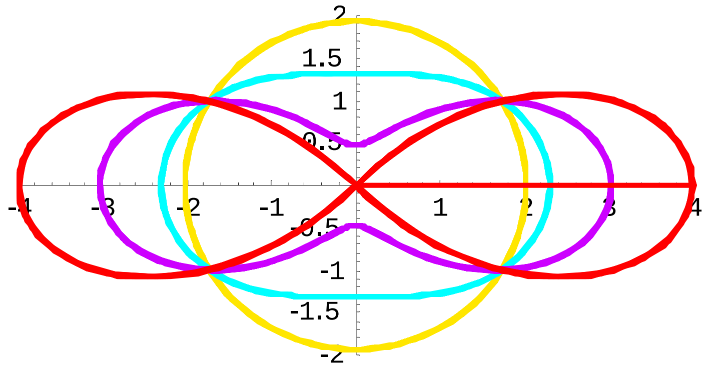


Cassinische Kurven

$$A = \frac{k^2\cos^2(2\theta)}{2}$$

$$r = r(\theta) = A \pm \sqrt{A^2 + 4a^2 - k^2}$$

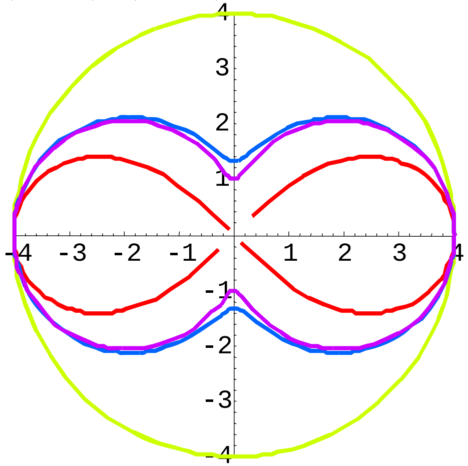
Bernoullische Lemniskate a=1,k=2



Boothsche Lemniskaten

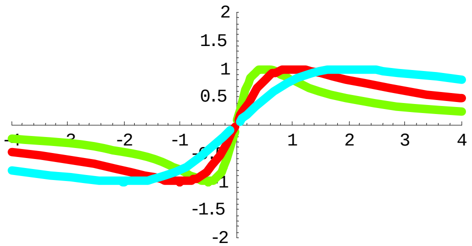
$$r^2 = k^4\left(\frac{\cos^2(\theta)}{a^2} \pm \frac{\sin^2(\theta)}{b^2}\right)$$

a=1, k=2, (+,b=1 außen), (-,b=1,Lemniskate), (+,b=3), (+,b=4)



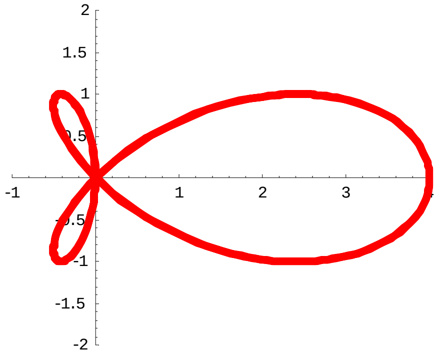
Serpentine $k = 1,\ a = \frac{1}{2}, a = 1,\ a = 2$

$$r^2 = r(\theta)^2 = a\,\frac{2k\cos(\theta) - a\,\sin(\theta)}{\sin(\theta)\cos(\theta)^2}$$



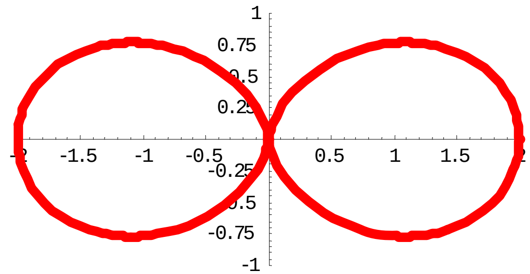
Dreiblatt,

$$r = r(\theta) = 2\sin(\theta)\ \cos(2\,\theta)$$



Doppel-Ei

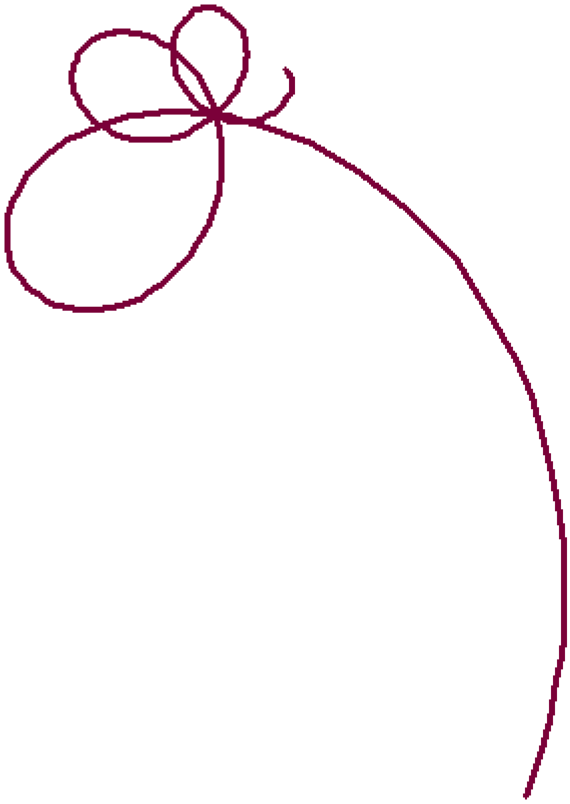
$$r = r(\theta) = a\ \cos(\theta)^2$$



Esrte Staatsprüfung für das Lehramt an Berufsbildenden Schulen
Prof. Dr. Dörte Haftendorn (Mit CAS-Taschenrechner TI-voyage) September 2005

Aufgabe 1 Analysis „Polar-Blume“

Es ist $r(\varphi)=\frac{1}{\varphi-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}\varphi\right)$ gegeben.



a) Entwickeln Sie einen kartesischen Graphen hierzu aus zwei Bausteinen für $\varphi \geq 0$. (Siehe auch Teil c)

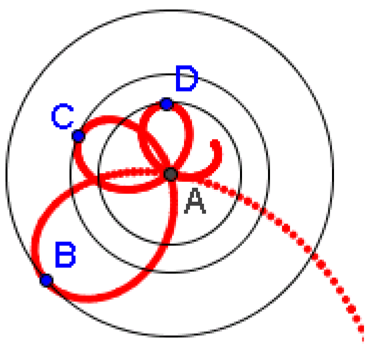
b) Rechts ist der Polar-Graph im Intervall [2, 10] dargestellt. Zeichnen Sie rechts ein Koordinatensystem ein und bestimmen Sie für Anfangs- und Endpunkt Gradmaß, Radius und kartesische Koordinaten.
Kennzeichnen Sie in Ihrem Bild aus a) die Entsprechungen dieser drei Blätter.

c) Bestimmen Sie exakt $\lim_{\varphi\to 1} r(\varphi)$.
Warum zeigt der TI im 3. Quadranten eine Lücke? Zeichnen Sie hier (durch den Text hindurch) die Polarblume von $\varphi=0$ an.
Wie sieht sie für immer größer werdende Winkel aus?

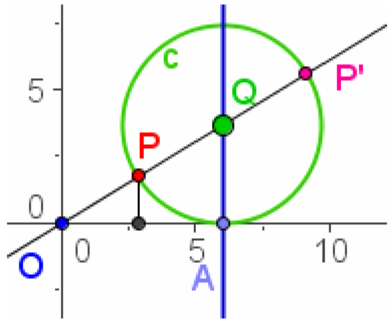
d) Bestimmen Sie numerisch mit TI und mit dem Keplerverfahren den Flächeninhalt des größten der oben dargestellten Blätter.
Ermitteln Sie auch einen groben Näherungswert durch Einzeichnen und Auswerten einer elementaren Figur.
Erkären Sie, warum das Keplerverfahren hier keinen sonderlich guten Wert liefert.

e) Bestimmen Sie für dieses Blatt den vom Ursprung am weitesten entfernten Punkt als relatives Maximum von r (mit Ableitung von Hand, numerische Auswertung der Ableitung mit TI).
Welche Möglichkeiten haben Sie, ohne Ableitung an numerische Werte zu kommen?
Warum kann man keine exakten Werte anstreben?

f) In einem Dynamischen-Mathematik-System könnte man in der gezeigten Art Kreise „aufziehen“. Begründen Sie, warum es für jedes Blatt genau einen solchen „Berührkeis“ gibt.
Beziehen Sie dies auf Ihre bisherige Aufgabenbehandlung.
Was lässt sich zu der Folge der Kreisradien und der Folge der Winkelstellungen der Berührpunkte B, C, D,... sagen?



Strophoide = *Seilkurve*



Konstruktionsbescheibung für die Strophoide

Anmerkung: Sie brauchen viel Platz oben und unten. Spiegeln Sie gefundene Punkte an der x-Achse.

1) Wähle A auf der x-Achse. Strecke $\overline{OA}$=a.
2) Errichte in A die Senkrechte auf die x-Achse.
3) Setze Q frei auf diese Senkrechte.
4) c sei der Kreis um Q durch A.
5) Kreis c schneidet die Gerade OQ in P und in P'.
6) Gesucht ist der Ort von P und P', wenn Q auf der Senkrechten läuft.

Aufgaben

a) Führen Sie die Konstruktion für einige Stellungen von Q durch.

b) Markieren Sie stets P und P' und spiegeln Sie alle Ihre Punkte an der x-Achse

c) Was ergibt sich, wenn Q auf A wandert.

d) Was geschieht, wenn Q immer höher wandert.

e) Deuten Sie in der Zeichnung an und verbalisieren Sie, wie die gesamte Strophoide aussieht.

f) Leiten Sie die Polargleichung (in Abhängigkeit von a) für die Strophoide her.

Ergebnis zur Sicherheit $r(\varphi)=\dfrac{a}{\cos(\varphi)} - a\tan(\varphi)$ oder $r(\varphi)=a\,\dfrac{1-\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}$

g) Leiten Sie geometrisch (Pyth., Strahlensatz) eine implizite kartesische Gleichung her. Ergebnis zur Sicherheit $x(a-x)^2=y^2(2a-x)$ $\boxed{1}$

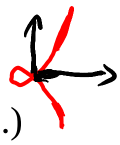
h) Leiten Sie aus der Polargleichung eine implizite kartesische Gleichung her. her. Ergebnis zu Sicherheit $(x^2+y^2)(a-x)^2=a^2y^2$ $\boxed{2}$

i) $\boxed{1}$ und $\boxed{2}$ sind nicht äquivalent, denn in $\boxed{2}$ ist die y-Achse Lösung, zeigen Sie das Letztere. Welche Rolle spielt hier der Grad jeder der Gleichungen? Gehört die y-Achse zu der Konstruktion?

j) Zeigen Sie mit einer der Gleichungen, dass sich für x=2a keine Punkte ergeben können. Begründen Sie dort eine Asymptote durch Betrachtung der Konstruktion.

k) Welchen Einfluss auf die Form der Strophoide hat die Größe von a?

l) Die Hundekurve (Konchoide des Nikomedes) hat in aufrechter Stellung die Gleichung $(x^2+y^2)(a-x)^2=k^2x^2$ $\boxed{3}$



Gibt es eine nichttriviale Hundekurve, evt. noch verschoben, die gleichzeitig Strophoide ist? (Mit Begründung auf irgendeine Weise.)